فصل اول

بررسی خواص فیزیکی سیال

۱-۱- معرفی و تعاریف اولیه

- مکانیک سیالات شاخه ای از مکانیک کاربردی است که به بررسی رفتار سیال در حالت سکون و حرکت می‌پردازد.

- پدیده‌های طبیعی بسیاری وجود دارند که مکانیک سیالات در مطالعه آنها کاربرد دارد. از آن جمله می‌توان به حرکت ابرها، پرواز پرندگان، جریان آب در رودخانه‌ها، حرکت امواج دریا و نفوذ و حرکت آب در خاک اشاره نمود.

- علاوه بر نقش مکانیک سیالات در بررسی پدیده‌های طبیعی، بسیاری از مسائل مهندسی نیز وجود دارند که از کاربردهای مکانیک سیالات به شمار می‌آیند. به عنوان مثال در مطالعه و بررسی مسائلی نظیر جریان آب در لوله‌ها، نیروهای وارده از طرف آب بر سدها، نفوذ آب در خاک و ... نیاز به استفاده از قوانین مکانیک سیالات می‌باشد.

$$F_v = \gamma \forall$$

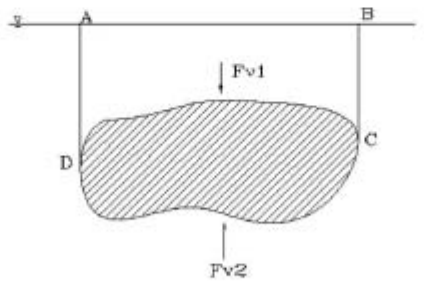
$$S = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi \times 1.5 \times 0.9}{4} = 1.06 m^2$$

$$F_v = 9810 \times (1.06 \times 2.4 + 1.5 \times 2.4 \times 1.2) = 67.34 N$$

۲-۱۵- شناوری و پایداری اجسام غوطه‌ور و شناور

به نیروی قائم روبه بالا که از طرف سیال ساکن بر یک جسم شناور یا غوطه‌ور در آن وارد می‌شود، نیروی شناوری می‌گویند. این نیرو مؤلفه افقی ندارد. نیروی شناوری بر مرکز شناوری یک جسم وارد می‌شود که همان مرکز جسم یا مرکز ثقل سیال جابجا شده است که لزوماً با مرکز ثقل جسم یکی نیست.

اگر قسمتی از جسم داخل سیال و قسمت دیگر بیرون از آن باشد، آن جسم را شناور می‌نامیم. ولی اگر تمام جسم در سیال واحد فرورفته باشد آن جسم را غوطه‌ور یا مستغرق می‌گویند. در شکل زیر یک جسم غوطه‌ور و نیروهای وارد بر آن نمایش داده شده است.



شکل ۲-۲۵: جسم غوطه‌ور و نیروهای وارد بر آن

بر این جسم دو نیرو وارد می‌شود.

الف- نیروهای قائم ناشی از وزن سیال ساکن

- سیال چیست؟

سیال ماده‌ای است که سیلان داشته باشد، یعنی جاری باشد. همانطور که در فیزیک دیده‌ایم مواد را می‌توان به دو دسته کلی جامدات و سیالات تقسیم کرد. که سیالات خود به دو دسته مایعات و گازها تقسیم می‌شوند.

جامدات، مایعات و گازها از نظر فاصله بین مولکولها و دامنه حرکات مولکول‌ها با یکدیگر تفاوت دارند که این خود به بزرگی نیروی جاذبه بین مولکولی این مواد بستگی دارد.

جامدات به دلیل نیروی زیاد جاذبه بین مولکولی به طور عمومی شکل خود را حفظ می‌کنند. لذا می‌توان به هر جامد یک شکل خاص نسبت داد.

در مایعات به دلیل کمتر بودن نیروی جاذبه بین مولکولی، ذرات مختلف مایعات موقعیت خاصی نداشته و در نتیجه مایعات شکل خاصی ندارند ولی حجم مشخصی دارند.

گازها به علت کم بودن نیروی جاذبه بین مولکولیشان نه تنها شکل مشخصی ندارند، بلکه حجم مشخصی هم نداشته و در تمام فضای اطراف خود پراکنده می‌شوند.

۱-۱-۲- تعریف دیگری از سیال:

از دیدگاه دیگر، سیال ماده‌ای است که قدرت تحمل تنش برشی را ندارد و در مقابل تنش‌های برشی (هرچند ناچیز) تغییر شکل می‌دهد یا به عبارتی جریان پیدا می‌کند. این نکته بدین معنا نیست که تنش‌های برشی در سیالات به هیچ وجه وجود ندارد. در سیال در حال حرکت تنش‌های برشی وجود داشته و در بررسی حرکت سیالات نقش مهمی ایفا می‌کند. اما در سیال ساکن تنش برشی وجود ندارد. در سیال ساکن فقط نیروهای عمودی (فشاری) وارد می‌شود.

سیالات برخلاف جامدات دارای خاصیت تراکم پذیری‌اند و این موضوع خصوصاً در مورد گازها مشخص‌تر است. ولی مایعات تراکم‌پذیری کمی دارند.

- از یک دیدگاه می‌توان مکانیک سیالات را به سه بخش کلی تقسیم نمود:

۱) سکون یا استاتیک سیالات که به بررسی قوانین مربوط به سیال ساکن می‌پردازد.

۲) سینماتیک سیالات که در آن حرکت سیال بدون در نظر گرفتن نیروها بررسی می‌شود.

۳) دینامیک سیالات که به بررسی حرکت سیال در حالت کلی اختصاص دارد.

۱-۲- ابعاد و واحدها

در بررسی پدیده‌های فیزیکی و اندازه‌گیری‌های مربوطه از سیستم‌ها یا واحدهای اندازه‌گیری مختلف استفاده می‌شود. سیستم‌های اندازه‌گیری مختلفی وجود دارد که در ذیل به آنها اشاره می‌شود.

- سیستم بین المللی واحدها یا SI
- سیستم وزنی بریتانیا یا BG
- سیستم MKS
- سیستم MTS
- سیستم CGS
- سیستم ft-lb-s

دو سیستم SI و BG به عنوان سیستم‌های اندازه‌گیری اصلی شناخته می‌شوند و سایر سیستم‌های اشاره شده از این دو سیستم منشعب می‌شوند.

۱-۳- خواص سیال

در ادامه به تعدادی چند از خواص سیالات اشاره می‌شود.

۱-۳-۱- جرم مخصوص[۲] (چگالی)

جرم مخصوص، جرم در واحد حجم هر ماده است و با ρ نمایش داده می‌شود بنابراین جرم مخصوص از رابطه زیر بدست می آید.

$$\rho = \frac{m}{\forall}$$

بعد جرم مخصوص به صورت زیر است:

$$[\rho] = ML^{-3}$$

واحد جرم مخصوص در سیستم SI، kg/m^3 و در سیستم BG، lb/ft^3 است.

۱-۳-۲- وزن مخصوص

نیروی جاذبه وارد بر واحد حجم، وزن مخصوص نامیده می‌شود. و آن را با γ نشان می دهند. در سیستم SI واحد وزن مخصوص N/m^3 است و معمولاً با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\gamma = \rho g$$

وزن مخصوص دارای بعد $[\gamma]=FL^{-3}$ می‌باشد.

۱-۳-۳- حجم مخصوص

حجم واحد جرم ماده را حجم مخصوص می‌نامند و آنرا با (v) نمایش می دهند. v عکس ρ بوده و بیشتر برای گازها استفاده می‌شود.

$$v = \frac{1}{\rho}$$

۱-۳-۴- چگالی نسبی

چگالی نسبی با Sg نشان داده می‌شود. طبق تعریف چگالی نسبی، نسبت چگالی مایع به چگالی آب خالص در شرایط استاندارد (دمای ۴ درجه سانتیگراد) است. چگالی آب در ۴ درجه سانتیگراد برابر $1000\ kg/m^3$ یا $1gr/cm^3$ است.

۱-۳-۵- تراکم‌پذیری:

اگر تغییرات چگالی با فشار قابل صرفه‌نظر کردن باشد، سیال تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود. مایعات غالباً چنین وضعیتی دارند. در مقابل برای سیالات تراکم‌ناپذیر با افزایش فشار، چگالی افزایش می‌یابد. درخصوص آب، فقط در پدیده چکش آبی (ضربه قوچ) آب را تراکم‌پذیر در نظر می‌گیرند.

تراکم‌پذیری سیال به طور معکوس متناسب با کمیتی به نام ضریب ارتجاعی یا کشسانی حجمی است. که بعنوان مدول حجمی نیز شناخته می‌شود.

$$k \text{ or } E_V = -v\frac{dp}{dv} = -\frac{dp}{dv/v} = \frac{dp}{d\rho/\rho} = -\frac{\Delta p}{\Delta\forall/\forall}$$

که در رابطه فوق v حجم مخصوص، dp و dv به ترتیب تغییر فشار و تغییر حجم مخصوص و V حجم سیال می‌باشد. E_V دارای بعد مشابه فشار و مشابه ضریب ارتجاعی جامدات (مدول یانگ) می‌باشد. تراکم‌پذیری نسبت عکس با ضریب کشسانی حجمی دارد، هرچقدر این ضریب بزرگتر باشد سیال تراکم ناپذیرتر است.

مدول حجمی تابعی از درجه حرارت و فشار می‌باشد. هرچه فشار بیشتر باشد، مدول حجمی بیشتر و یا به عبارت دیگر تراکم پذیری سیال کمتر است.

مدول حجمی آب با درجه حرارت تغییر می‌کند. بیشترین مقدار مدول حجمی (کمترین مقدار تراکم‌پذیری) آب در دمای ۵۰ درجه سانتیگراد مشاهده می‌شود.

بطوریکه آب در دمای 50^{C} دارای مدول حجمی ۲/۳ Gpa و در دمای صفر مدول حجمی آن ۲/۱۰ Gpa است

در جدول ۱-۵، خواص تعدادی از مایعات در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد و فشار ۱ اتمسفر آمده است.

مثال۱-۱:

مایعی در داخل یک سیلندر متراکم می‌شود و حجم و فشارش به ترتیب از یک لیتر و 1MPa به $955cm^3$ و 2MPa می‌رسد. مطلوب است محاسبه مقدار ضریب کشسانی حجمی مایع.

حل:

$$\forall_1 = 1Lit = 1000cm^3$$
$$\forall_2 = 955cm^3$$
$$P_1 = 1MPa$$
$$P_2 = 2MPa$$
$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta \forall / \forall} = -\frac{(2-1)MPa}{\frac{955-1000}{1000}} = 200MPa$$

۱-۴- لزجت و گرانروی یا ویسکوزیته

لزجت، مهمترین ویژگی یک سیال است. لزجت وسیله‌ای برای اندازه‌گیری مقاومت سیال در مقابل تنش‌های برشی است. عامل اصلی در ایجاد مقاومت، اندرکنش بین مولکولی است که به دو صورت چسبندگی و تبادل مومنتوم مشاهده می‌شود. در گازها که در آنها نیروهای جاذبه بین مولکولی خیلی کوچک است، آنچه باعث مقاومت در برابر تنش برشی می‌شود (عامل لزجت)، انتقال اندازه حرکت مولکولی گاز (مومنتم) است. در مقابل لزجت مایعات ناشی از چسبندگی مولکولی یا جاذبه مولکولی ذرات مایع است.

مقاومت سیال در مقابل حرکت و تنش‌های برشی را می‌توان به اصطکاک تعبیر کرد، زیرا نیروهای بین‌مولکولی در مقابل حرکت نسبی ذرات سیال نسبت به یکدیگر مخالفت و مقاومت می‌کنند. می‌توان چنین تعبیر کرد که در اثر خاصیت لزجت، سیال تلاش می‌کند تا سرعت ذرات جامد یکنواخت شود. یا به

عبارتی سیال در اثر خاصیت لزجت در مقابل گرادیان سرعت مقاومت می‌کند. در اثر این مقاومت مقداری از انرژی جنبشی به انرژی حرارتی تبدیل شده که سبب بالا رفتن دمای سیال می‌شود.

۱-۴-۱- سیال واقعی و سیال ایده‌آل

تمام سیالات واقعی لزج هستند ولی با تقریب قابل قبول در مهندسی بعضی سیالات را می‌توان غیر لزج (سیال ایده آل) فرض کرد. سیال ایده آل سیالی است که لزجت آن را صفر در نظر می‌گیریم، پس حتی در حالت حرکت هم در این سیال تنش وجود نخواهد داشت. پس در سیال ایده‌آل حتی در حالت حرکت نیز نیروی برشی وجود نداشته و فقط نیروهای فشاری خواهیم داشت.

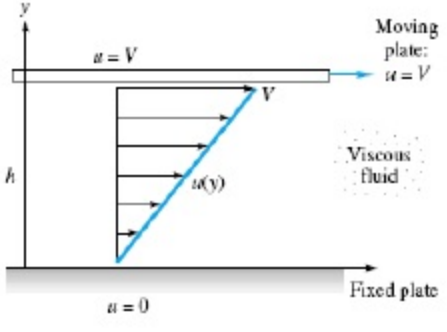
۱-۴-۲- عوامل مؤثر بر لزجت سیالات

از آنجا که عامل بوجود آورنده لزجت درگازها، تبادل مولکولی بین لایه‌های مختلف سیال در حال حرکت یا به عبارتی تبادل مومنتوم و ضرباتی که مولکول‌ها به یکدیگر وارد می‌کنند، می‌باشد، لذا با افزایش دما حرکات مولکولی افزایش یافته و در نتیجه لزجت گازها افزایش می‌یابد.

در مایعات عامل اصلی بوجود آورنده لزجت، چسبندگی بین مولکولی است و از آنجا که با افزایش دما این چسبندگی کاهش می‌یابد، لذا لزجت مایعات با افزایش دما کاهش می‌یابد.

۱-۴-۳- مثال کلاسیک جریا ن بین دو صفحه موازی

برای توضیح بیشتر در خصوص لزجت مایعات می‌توان به مثال کلاسیک جریان بین دو صفحه موازی مطابق شکل زیر پرداخت.



شکل ۱-۱ جریان بین دو صفحه موازی

فرضیات این حرکت چنین است:

۱- صفحه بالا با سرعت ثابت U حرکت می‌کند.

۲- صفحه پائین ثابت و فاصله دو صفحه از یک سیال پوشیده است.

۳- ابعاد صفحه‌ها چنان بزرگ است که از اثر لبه‌ها می‌توان صرفه نظر کرد.

۴- ذرات سیال در محل تماس با صفحات، سرعتی برابر همان صفحه دارند.

۵- سرعت U نسبت به فاصله بین دو صفحه (h) خیلی زیاد است.

۶- تنها عامل حرکت، حرکت صفحه بالایی است.

با این فرضیات گویا ذرات سیال در لایه‌های موازی با یکدیگر، نسبت به هم می‌لغزند. براساس این آزمایشات مشاهده شد که نیرو وارد بر صفحه بالایی برای به حرکت درآوردن آن با سرعت U به صورت زیر می‌باشد.

$$F \simeq \frac{AU}{h}$$

با توجه به فرضیات فوق ثابت می‌شود که پروفیل سرعت برابر است با

$$\frac{u}{h} = \frac{du}{dy}$$

که این مطلب توسط آزمایشات تأیید شده است. با معرفی ضریب تناسب خواهیم داشت:

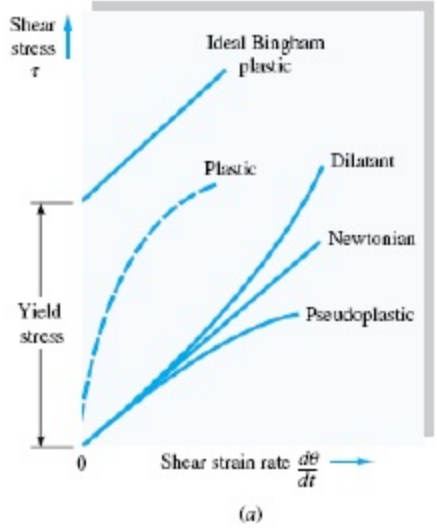
$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

این رابطه به رابطه سیال نیوتنی معروف است. μ همان ضریب لزجت یا لزجت دینامیکی است. براساس رابطه فوق هرچه گرادیان سرعت $\frac{du}{dy}$ بیشتر و هرچه سیال لزج‌تر باشد، تنش برشی ایجاد شده بیشتر است. بدین ترتیب در مثال فوق با افزایش گرادیان سرعت و لزج‌تر شدن سیال، نیروی F بیشتری برای به‌حرکت درآوردن صفحه فوقانی لازم خواهد بود.

براساس رابطه فوق اگر تنش برشی ثابت باشد، توزیع سرعت خطی است و اگر به صورت خطی تغییر نماید توزیع سرعت سهوی خواهد بود.

۱-۴-۴- سیال نیوتنی و غیرنیوتنی

هر سیالی که از رابطه سیال نیوتنی پیروی کند، سیال نیوتنی نام دارد. همه سیالات از رفتار نیوتنی تبعیت نمی‌کنند. به سیالاتی که رفتار آنها در مقابل اعمال تنش برشی از رابطه فوق تبعیت نمی‌کند، سیالات غیرنیوتنی می‌گویند. بررسی رفتار مواد مختلف در مقابل تأثیر تنش برشی را رئولوژی می نامند و رفتار مواد مختلف در مقابل تنش برشی را رفتار رئولوژیک می‌گویند. در شکل زیر رفتار رئولوژیک مواد مختلف به صورت شماتیک نشان داده شده است.



شکل۱-۲: رفتار رئولوژیک انواع سیالات

در سیال بینگهام رابطه تنش و نرخ کرنش بصورت زیر است :

$$\tau = \tau_y + \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^m$$

مثال‌های از سیالات غیرنیوتنی عبارت‌اند از: رنگ، جوهر، ژل‌ها، خون و ....

۱-۴-۵- لزجت دینامیکی

بعد لزجت دینامیکی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{du}{dy}\right]} = \frac{FL^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}} = FL^{-2}T$$

واحد لزجت در SI، $\frac{N.S}{M^2}$ یا Pa.S است. یکی از واحدهای معروف و قدیمی لزجت، پوآز و سانتی‌پوآز است. پوآز واحد لزجت دینامیکی در سیستم CGS است. لزجت آب در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد برابر یک سانتی‌پوآز است. بدین ترتیب مقایسه لزجت دیگر سیالات با آب در مقیاس سانتی پوآز آسان است.

پوآز به صورت زیر بیان می‌شود

$$1\text{Poise} = \frac{\text{dyne} \times \text{s}}{\text{Cm}^2}$$

1 Poise=0.1 Pa.S

۱-۴-۶- لزجت سینماتیکی

لزجت سینماتیکی با υ نشان داده شده و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

بعد لزجت سینماتیکی $[\upsilon] = L^2T^{-1}$ است و در سیستم متریک واحد لزجت سینماتیکی m^2/s می‌باشد. واحد لزجت سینماتیکی در سیستم CGS استوکس بوده و برابر 10^{-4} m^2/sاست.

در محدوده فشارهای متعارف در کارهای مهندسی با تقریب قابل قبولی می‌توان لزجت سیالات را ثابت فرض کرد ولی با افزایش بیش از حد فشار μ افزایش می‌یابد.

در جدول ۱-۴، ویسکوزیته و دانسیته آب در فشار ۱ اتمسفر در دماهای مختلف آمده است.

مثال ۱-۲:

صفحه مستطیل شکل نازکی در میان دو صفحه دیگر که با فاصله h از هم قرار دارند، واقع شده است. اگر صفحه با سرعت V کشیده شود و اگر در یک طرف، سیال با ویسکوزیته μ و در طرف دیگر سیالی با ویسکوزیته $K\mu$ باشد. نیرویی که به صفحه وارد می‌شود چقدر است؟

شکل۱-۳: شکل مثال ۱-۲

حل:

$$\tau_1 = \mu_1 \frac{du}{dy} = \mu \frac{V-0}{h-y} = \mu \frac{V}{h-y}$$

$$\tau_2 = \mu_2 \frac{du}{dy} = K\mu \frac{V}{y}$$

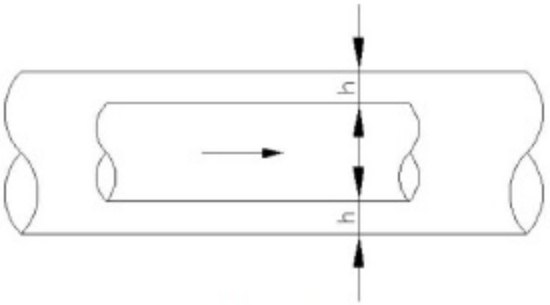
$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$F = \tau \times A = (\tau_1 + \tau_2)A = \left(\mu \frac{V}{h-y} + K\mu \frac{V}{y}\right) \times A$$

$$F = \mu A \left(\frac{V}{h-y} + K\frac{V}{y}\right)$$

مثال ۱-۳:

سیلندری به‌طول L=3ft و قطر d=8 in داخل لوله‌ای به قطر d=8.25 in با سرعت V=3ft/s حرکت می‌کند. سیال بین سیلندر و لوله، روغنی با لزجت سینماتیکی υ=0.006 ft^2/s و Sg= 0.92 است. نیروی لازم برای حرکت لوله در سیلندر چقدر است؟



شکل۱-۴: شکل مثال ۱-۳

حل:

ضخامت لایه روغن:

$$dy = \frac{8.25-8}{2} = 0.125\,in$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_{oil}} \rightarrow \mu = \nu\rho_{oil}$$

$$\tau_w = \mu\frac{du}{dy}$$

$$Sg = \frac{\rho_{oil}}{\rho_w} \rightarrow \rho_{oil} = \rho_w \times Sg$$

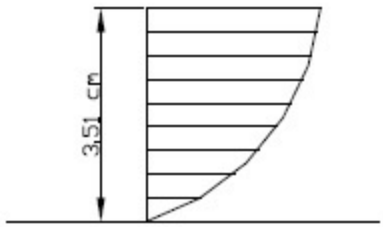
$$\tau_w = \mu\frac{du}{dy} = \nu.Sg.\rho_w \times \frac{3ft}{0.125in \times \frac{1ft}{12in}}$$

$$F = \tau \times A = \tau \times 2\pi rL$$

$$F = \upsilon.Sg.\rho_w \times \frac{3\times 2\pi rh}{0.125\times\frac{1ft}{12in}} = 0.006\times 0.92\times\frac{62.4}{32.2}\times\frac{3\times 2\pi\times\frac{4}{12}\times 3}{0.125\times\frac{1ft}{12in}} = 19.357Lb$$

مثال ۱-۴:

پروفیل سرعت برای جریان سیال گلیسیرین در دمای $۲۰^{\circ}C$ بر روی صفحه مسطح بصورت $u=36y-472.4y^2$ می‌باشد. u برحسب m/s و y برحسب m است. تنش برشی را در $y=0.5cm$, $y=0$ و $y=1cm$ و $y=1.5cm$ از کف تعیین کنید. $\mu=1.49pa.s$



شکل۱-۵: شکل مثال ۱-۴

حل:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy} \quad , \quad u=36y-472.4y^2$$

$$\frac{du}{dy}=36-472.4\times 2y=36-944.8y$$

$$\tau=1.49\times(36-944.8y)$$

نکته : اگر پروفیل سرعت خطی باشد $\frac{du}{dy}$ ثابت است و تنش در عمق ثابت خواهد بود . زیرا

$$u=ax+b$$

$$\frac{du}{dx}=a$$

اما در این مثال پروفیل سرعت غیر خطی بوده و لذا تنش در عمق متغییر است به طوریکه در کف بیشترین مقدار را دارد.

$$y=0\rightarrow\tau=53.64\,{}^{N}\!/_{m^2}$$

$$y=0.5cm=0.005m\rightarrow\tau=46.6$$

$$y=1cm=0.01m\rightarrow\tau=39.56$$

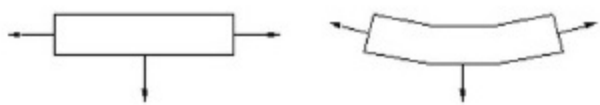
$$y=1.5cm=0.015m\rightarrow\tau=32.52$$

۱-۵- کشش سطحی

کشش سطحی یکی از خواص سیال است. در اثر همین خاصیت سیال است که یک قطره آب می تواند در دهانه شیر باقی بماند یا سطح آب در داخل یک ظرف به حالت مقعر باشد. در اثر این خاصیت است که خاصیت موئینگی بوجود می‌آید و یا حشرات کوچک می‌توانند روی آب بنشینند.

عامل بوجود آورنده خاصیت کشش سطحی نیروهای جاذبه بین مولکولی است که این نیروها خود بر دو قسمت می‌باشند. نیروی پیوستگی[۳] که نیروی جاذبه بین مولکول‌های مشابه است و نیروی چسبندگی[۴] که نیروی چسبندگی بین مولکول‌های غیرمشابه است.

همانطور که در شکل ۱-۸ مشخص است، ذرات موجود در روی سطح مایع فقط نیروی پیوستگی را که ناشی از جاذبه مولکول‌های مجاور هم سطح و پائین‌تر است تجربه می‌کند ولی بالاتر از سطح آب که مولکولهای آب و نتیجتاً جاذبه بین مولکولهای مشابه وجود ندارد، نیروی وارده از مولکول‌های هوا در بالاتر از سطح آب ناچیز بوده و در نتیجه برآیند وارده بر مولکول‌های سطح سیال رو به پائین است و اثر مکانیکی این وضعیت قابلیت تحمل نیروی کششی توسط سطح سیال است.



شکل ۱-۸: نیروهای بین مولکولی برای ذرات واقع بر سطح آب

خاصیت کشش سطحی سیالات مختلف را با اندازه‌گیری کشش در واحد طول سطح مقایسه می‌کنند و واحد آن در سیستم متریک N/M می‌باشد.

کشش سطحی سیال در اثر افزایش درجه حرارت تا حدی کاهش می‌یابد. علاوه بر درجه حرارت، کشش سطحی به وجود املاح روی سطح سیال هم بستگی دارد.

کشش سطحی آب در مجاورت هوا بین ۰/۰۷۵۶ تا ۰/۰۵۸۹ نیوتن بر متر به ترتیب در درجه حرارت صفر و ۱۰۰ درجه سانتیگراد است.

شکل ۱-۸: نیروهای بین مولکولی برای ذرات واقع بر سطح آب

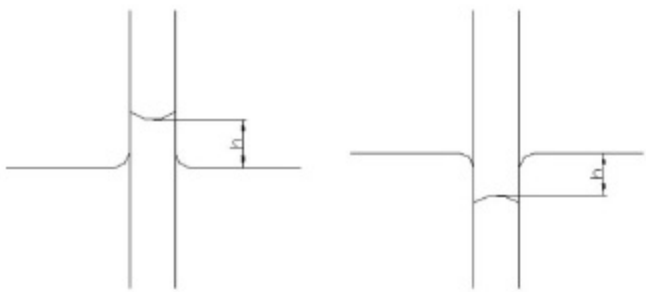
خاصیت کشش سطحی سیالات مختلف را با اندازه‌گیری کشش در واحد طول سطح مقایسه می‌کنند و واحد آن در سیستم متریک N/M می‌باشد.

کشش سطحی سیال در اثر افزایش درجه حرارت تا حدی کاهش می‌یابد. علاوه بر درجه حرارت، کشش سطحی به وجود املاح روی سطح سیال هم بستگی دارد.

کشش سطحی آب در مجاورت هوا بین ۰/۰۷۵۶ تا ۰/۰۵۸۹ نیوتن بر متر به ترتیب در درجه حرارت صفر و ۱۰۰ درجه سانتیگراد است.

۱-۶- خاصیت موئینگی

تفاوت بین نیروهای پیوستگی و چسبندگی باعث بوجود آمدن خاصیت موئینگی می‌شود. در اثر خاصیت موئینگی سیال در یک لوله نازک بالا رفته و یا پائین می‌آید.

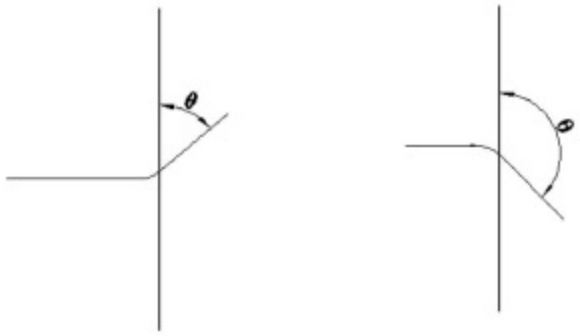


شکل۱-۹: بالا و پائین رفتن سیال در لوله موئین

در صورتیکه نیروهای چسبندگی بین سیال و جامد بیشتر از نیروی پیوستگی بین ذرات سیال باشد، در محل تماس سیال با سطح جامد، سطح سیال بالا می‌رود در این حالت زاویه سطح سیال در محل تماس

با جامد کمتر از ۹۰ درجه می‌باشد و در این حالت گفته می‌شود که سیال جسم جامد را خیس می‌کند. مثلاً در خصوص شیشه تمیز و آب زاویه θ تقریباً برابر صفر درجه است.

در حالتیکه نیروی چسبندگی بین سیال و جامد کمتر از نیروی پیوستگی بین ذرات سیال باشد، سیال در محل تماس با سطح جامد پائین می‌رود و زاویه θ بیشتر از ۹۰ درجه بوده و اصطلاحاً گفته می‌شود سیال جامد را خیس نمی‌کند. مثل تماس جیوه با شیشه تمیز. شکل ۱-۱۰ زاویه تماس سیال با جسم جامد را نشان می دهد.



شکل ۱-۱۰: زاویه تماس سیال با جسم جامد

تعادل مایع در لوله مویین نتیجه تاثیر دو نیروی مخالف یکدیگر است. یکی از ایم نیروها، نیروی کشش سطحی است که جهت آن روبه بالا بوده و دیگری نیروی وزن مایع است که به سمت پایین اثر می‌کند. لذا برای یک لوله در تماس با سیال خواهیم داشت:

$$2\pi r\sigma Cos\theta - \pi r^2 h\gamma = 0$$

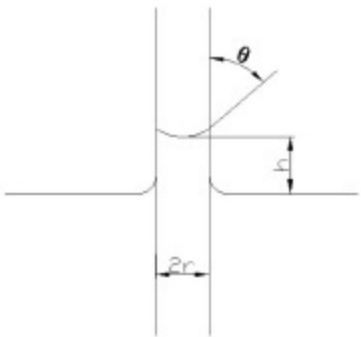
لذا ارتفاع موئینگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma.r}$$

که θ زاویه تماس سیال و جامد، σ : کشش سطحی سیال، r شعاع لوله موئین و h ارتفاع صعود موئینه می‌باشند.

برای محاسبه ارتفاع موئینگی کشش سطحی (σ) و زاویه تماس (θ) هر دو مؤثر هستند که ارتفاع موئینگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma.r}$$



شکل ۱-۱۱: عوامل موثر در محاسبه ارتفاع مویین

مثال ۱-۷:

ارتفاع صعود آب با دمای ۲۰ درجه سانتی گراد را بین دو صفحه شیشه ای که با فاصله $1mm$ از هم قرار گرفته‌اند را تعیین کنید:

حل:

در مورد سیال بین دو صفحه شیشه‌ای رابطه فوق اندکی متفاوت است. در این صورت اگر L فاصله بین دوصفحه و b عرض آنها باشد از تعادل نیروها داریم:

$$2b\sigma Cos\theta - bLh\gamma = 0$$

$$h = \frac{2\sigma Cos\theta}{\gamma.L}$$

$$h = \frac{2\times 0.0728\times Cos0}{\frac{1mm}{1000mm}\times 9810} = 0.015m$$

۱-۷- فشار بخار مایع

فشار جزیی مولکول‌های یک مایع را پس از تبدیل شدن به حالت گاز و در مجاورت سطح تماس سیال با هوا، فشار بخار می‌گویند. با افزایش درجه حرارت فشار بخار مایع افزایش می‌یابد. وقتی فشار بخار یک مایع معادل با فشار مطلق محلی و یا فشار گاز اطراف آن (هوا) می‌شود، مایع آماده تبخیر می‌گردد. از سوی دیگر اگر فشار گاز اطراف سطح آزاد مایع تا حد فشار بخار پائین بیاید در همان درجه حرارت مایع می‌جوشد. بنابراین فشار بخار یک مایع را می‌توان فشار جوش هم نامید.

به عنوان مثال با کاهش فشار روی مایع به مقدار کافی، آب می‌تواند در دمای اتاق بجوشد. در دمای $۲۰^{\circ}C$ فشار بخار آب ۲/۴۴۷ کیلوپاسکال و فشار بخار جیوه ۰/۱۷۳ پاسکال می‌باشد در حالیکه فشار بخار بنزین ۵۵ کیلوپاسکال است.

در اغلب سیستم‌هایی که مایعات در آن جریان دارند احتمال اینکه در نقاطی از سیستم فشار بقدری کاسته شود تا مساوی فشار بخار یا کمتر از آن بشود وجود دارد. این موضوع سبب می‌شود که مایع سریعاً تبخیر شده و پدیده ای به نام کاویتاسیون رخ دهد. در این حالت حباب‌های بخار وارده مایع می‌شوند و سپس به طرف منطقه‌ای از سیال که در آن فشار بیشتر است حرکت می‌کنند و در آنجا متلاشی می‌شوند که این موضوع باعث وارد شدن نیروهایی به مولکول‌های سیال اطراف این حباب‌ها شده و انتقال انرژی و افزایش سرعت این ذرات می‌گردد. که این ذرات تهایتاً به جداره‌های مثل پمپ‌ها، توربین ها و ..... برخورد کرده و باعث تخریب شدید آنها می‌شوند.

فصل دوم

استاتیک سیالات

۲-۱- تنش در سیال ساکن

در سیال ساکن تنش برشی وجود ندارد (چون $\frac{du}{dy}=0$ است)، لذا تنها نیروهایی که از طرف سیال ساکن بر محیط اطراف وارد می‌شود مربوط به نیروهای فشاری (عمودی) می‌باشد. اگرچه در مقایسه با نیروهای برشی ناشی از حرکت سیال، محاسبه این نیروهای فشاری ساده‌تر است، ولی بررسی آنها بسیار با اهمیت بوده و کاربردهای فراوانی دارد. بعنوان مثال در محاسبه نیروهای وارد بر سدها و محاسبه پایداری سدها، این نیروها از جایگاه خاصی برخوردارند.

۲-۲- تعریف فشار:

در هر نقطه از سیال ساکن فشار برابر است با نیرویی که بوسیله سیال بر واحد سطح (در آن نقطه) وارد می‌شود. ماهیت فشار در مایعات و گازها با هم متفاوت است. که در ادامه به آن اشاره می‌شود. پس داریم:

$$P=\frac{F}{A}$$

بعد فشار FL^{-2} خواهد بود.

در سیستم SI واحد فشار N/m^2 یا پاسکال (Pa) می‌باشد.

در سیستم BG واحد فشار Lb/ft^2 و یا Lb/in^2 که PSi هم نامیده می‌شود، می‌باشد.

در سیستم CGS واحد فشار $dyne/cm^2$ یا باری می‌باشد.

در سیستم MKS واحد فشار kgf/cm^2 می‌باشد.

واحدهای فشار را می‌توان به صورت زیر به یکدیگر تبدیل نمود.

$$10^5\,Pa = 1bar = 10^6\,bari = 1.2kg/cm^2 = 14.7Psi = 1atm$$

۲-۳- فشار در مایعات

فشار در مایعات به علت فواصل کم مولکولی، توسط مولکولها از یک سطح به سطح دیگر منتقل می‌شود بنابراین فشار در هر نقطه از یک مایع ساکن از وزن ذرات مایع که در ارتفاع بالاتر از آن قرار دارند ناشی می‌شود.

$$P = \gamma h$$

که h فاصله نقطه موردنظر تا سطح آزاد سیال می‌باشد.

۲-۴- فشار در گازها

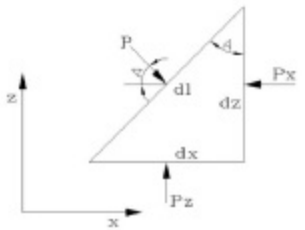
در گازها فواصل مولکولی به حدی است که مولکول‌ها مستقل از یکدیگر هستند. بنابراین وزن یک مولکول نمی‌تواند به مولکول‌های دیگر منتقل شود. بنابراین عامل ایجاد فشار در گازها ضربات مولکول‌های گاز به سطح محصور شده در آن است و با کاهش دمای گاز، این فشار کم می‌شود.

در این درس عمدتاً به بررسی فشار ناشی از مایعات و خصوصاً آب پرداخته خواهد شد.

۲-۵- مشخصات فشار استاتیکی سیالات (فشار هیدرواستاتیکی)

اولین نکته مهم در محاسبه نیروهای فشاری سیال در حالت سکون توجه به این نکته است که به دلیل عدم وجود تنش‌های برشی فشار در همه جهات در یک سیال ساکن یکسان است. که بعنوان قانون پاسکال شناخته می‌شود و نشان می‌دهد فشار یک کمیت اسکالر است.

به منظور بررسی این نکته یک المان از سیال را در صفحه Z و Y و X در نظر می‌گیریم. ابعاد المان dx، dy و dz است.



شکل ۲-۱: نیروهای وارد بر المان سیال در حال سکون

با توجه به شکل۲-۱، برای تعادل نیروها در جهت افقی خواهیم داشت.

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow -P_x .dz.dy + P.dl.dy.Cos\alpha = 0$$

از طرفی داریم:

$$dl.Cos\alpha = dz$$

پس:

$$Px = P$$

همچنین با نوشتن رابطه تعادل نیروها در جهت محور Z خواهیم داشت:

$$\sum F_Z = 0 \rightarrow -P.dl.\sin\alpha.dy - 1/2\rho g.dx.dy.dz + P_Z .dx.dy = 0$$
$$dl\sin\alpha = dx$$
$$1/2\gamma dx.dy.dz = 0$$
$$-P.dl.\sin\alpha.dy = P_z .dx.dy$$
$$\Rightarrow P = Pz$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$P = Px = Pz$$

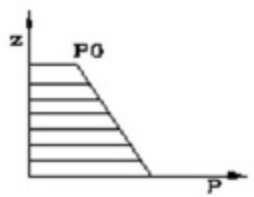
یعنی فشار در یک نقطه از سیال در تمام جهت یکسان است.

$$Z = Z_0 \rightarrow P = P0$$
$$\Rightarrow P = P0 - \gamma(Z - Z_0)$$

از رابطه فوق مشاهده می‌شود که اگر γ ثابت باشد، تغییرات فشار در امتداد قائم به صورت خطی خواهد بود و از آن به توزیع هیدرواستاتیک فشار یاد می‌شود مطابق شکل ۲-۳:

اگر فشار سطح مایع را صفر فرض کرده و عمق را به سمت پایین اندازه‌گیری نمایم، رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود

$$P = \gamma h$$



شکل ۲-۳: توزیع هیدرواستاتیک فشار

مثال ۲-۱:

با فرض ρ ثابت و فشار جو برابر یک اتمسفر در سطح آب، فشار مطلق در عمق ۸ کیلومتری آب اقیانوس را محاسبه کنید:

حل:

$$P = P_0 - \gamma Z$$
$$= 1.013 \times 10^5 - (9.81 \times 1000) \times (-8000) = 78.58 \text{Mpa}$$

۲-۷- فشار اتمسفر، مطلق، نسبی

فشار وارده از طرف هوا به سطح زمین، فشار هوا یا اتمسفر نام دارد. فشار اتمسفر در سطح دریاهای آزاد برابر ۷۶۰ میلیمتر جیوه می‌باشد.

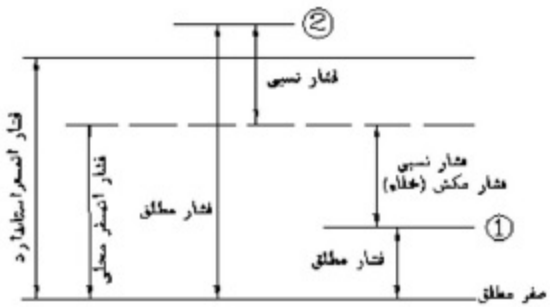
فشار را می‌توان نسبت به هر مبنای دلخواهی بیان نمود. معمولاً مبنای فشار، صفر مطلق و یا فشار اتمسفر محلی می‌باشد. زمانی که فشار برحسب اختلاف آن با خلاء کامل بیان گردد، آن را فشار مطلق گفته و زمانی که برحسب اختلاف با اتمسفر محلی بیان شود، فشار را فشار نسبی می‌نامند.

فشار اتمسفر محلی توسط بارومتر جیوه‌ای (شکل زیر) اندازه‌گیری می‌شود. که این وسیله اختلاف فشار بین اتمسفر و خلاء یا لوله‌ای که هوای آن تخلیه شده باشد را اندازه می‌گیرد.

در شکل ۲-۴ رابطه صفر مطلق و فشار اتمسفر محلی نشان داده شده است. اگر نقطه‌ای در زیر خط فشار اتمسفر محلی، که به عنوان مبدأ اندازه‌گیری معین شده، قرار داشته باشد، آنرا فشار منفی، مکش و یا خلاء می‌نامند. رابطه بین فشار اتمسفر و مطلق به صورت زیر است.

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{gage}$$

که P_{abs} فشار مطلق، P_{atm} فشار اتمسفر و P_{gage} فشار نسبی است.



شکل ۲-۴: رابطه صفر مطلق و فشار اتمسفر محلی

۲-۷-۱- اندازه‌گیری فشار اتمسفر و فشار مطلق

بارومتر جیوه‌ای یکی از وسایل اندازه‌گیری فشار می‌باشد. براساس شکل ۲-۵، فشار مطلق در نقطه O براساس فاصله تا سطح مایع در لوله فشارسنج برابر است با:

$$P_0 = \gamma h + P_{vapor}$$

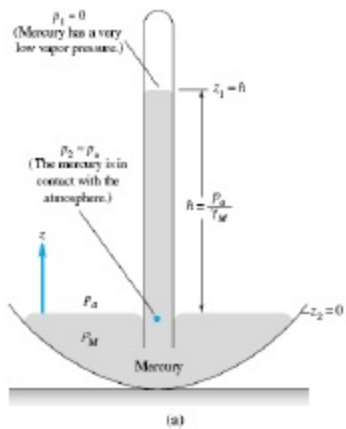
که با تقریب قابل قبولی می‌توان فرض کرد $P_{vapor} = 0$ از سوی دیگر فشار مطلق در نقطه a برابر با فشار اتمسفر است یعنی:

$$P_a = P_{atm}$$

بنابراین باتوجه به همسطح بودن نقطه a و o در یک سیال واحد داریم:

$$P_{atm} = \gamma h$$

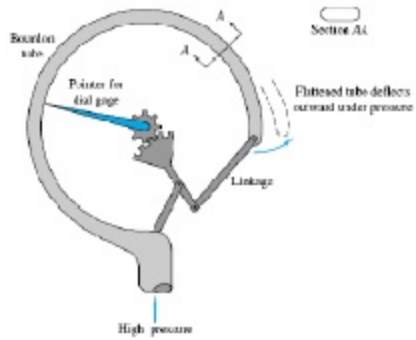
اگر سیال جیوه باشد و بارومتر در سطح دریای آزاد باشد، مقدار h برابر ۷۶۰ میلیمتر و اگر سیال آب باشد مقدار h برابر ۱۰/۳۴ متر خواهد بود.



شکل ۲-۵: بارومتر جیوه ای

۲-۷-۲- اندازه‌گیری فشار نسبی

اندازه‌گیری فشار نسبی توسط وسیله‌ای به نام اندازه‌گیر بوردن انجام می‌شود. در این وسیله قسمت فشاری از یک لوله فلزی خمیده یکنواخت تشکیل شده است که یک سر آن بسته و سر دیگرش به محلی که باید فشار آن اندازه‌گیری شود، متصل می‌باشد. با افزایش فشار داخلی، لوله تمایل به راست شدن خواهد داشت و اتصال بین عقربه و لوله خمیده کشیده می‌شود و درنتیجه عقربه شروع به گردش می‌کند. صفحه عقربه دار زمانی صفر را نمایش می‌دهد که فشار بیرونی و درونی لوله برابر باشد.



شکل ۲-۶: فشارسنج بوردن

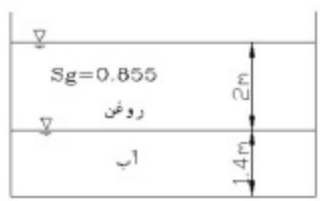
۲-۸- فشار برحسب ارتفاع یک سیال (ارتفاع معادل فشار)

اگر فشار سطح مایع را صفر فرض کرده و عمق را به سمت پایین اندازه‌گیری نمایم، یعنی با استفاده از رابطه $P=\gamma h$ می‌توان فشار در هر نقطه را معادل ارتفاع h از سیالی با وزن مخصوص γ درنظر گرفت.

بعنوان مثال اگر فشار در نقطه‌ای ۹۸۱۰ پاسکال باشد، می‌توان این فشار را معادل یک متر آب با $\gamma=9810$ دانست. تأکید می‌شود این رابطه تنها برای سیال تراکم‌ناپذیر که در آن γ ثابت می‌باشد صادق می‌باشد.

مثال ۲-۲:

برای شکل زیر ارتفاع معادل فشار در کف مخزن برحسب آب را حساب کنید:



شکل ۲-۷: شکل مثال ۲-۲

حل:

$$\gamma_{oil} = 0.855 \times 9810 = 8390 N/m^3$$

$$P_{oil} = \gamma_{oil} \times h_{oil} = 8390 \times 2 = 16.78 KN/m^2$$

ارتفاع نظیر فشار روغنی برحسب آب

$$h = \frac{16.78}{9.81} = 1.71 m$$

ارتفاع نظیر فشار کل برحسب آب

$$h = 1.71 + 1.4 = 3.11 m$$

۲- ۹- اندازه‌گیری فشار

وسایل اندازه‌گیری فشار به شرح زیر است.

۲-۹-۱- بارومتر جیوه‌ای

یکی از وسایل اندازه‌گیری فشار اتمسفر می‌باشد که پیشتر شرح داده شد.

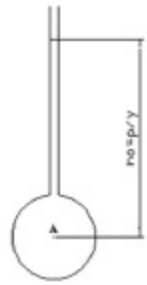
۲-۹-۲- فشارسنج بوردن

وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری فشار که پیشتر شرح داده شد.

۲-۹-۳- مانومترها

در این دستگاه‌ها از قرائت اختلاف ارتفاع ستون مایع، جهت تعیین اختلاف فشار استفاده می‌شود. ساده‌ترین نوع این دستگاه‌ها، پیزومتر نامیده می‌شود و در حالتی از آنها استفاده می‌شود که فشار نسبی مایع مثبت باشد.

اگر لوله A در شکل زیر تحت فشار قرار داشته باشد، با سوراخ کردن لوله و اتصال شیشه‌ای (پیزومتر) به آن، مایع در پیزومتر تا جایی بالا می‌آید که به حالت تعادل برسد. بدین منظور طول لوله باید به اندازه کافی بلند باشد تا مایع از آن سرریز نکند. ارتفاع مایع در لوله‌های پیزومتر مستقیماً مقدار فشار نسبی در محل اتصال به لوله را بدست می‌دهد.



شکل ۲-۸: استفاده از پیزومتر در اندازه‌گیری فشار

پیزومترها دارای دو اشکال اساسی هستند. اول آنکه زمانی‌که فشار زیاد باشد و درنتیجه ارتفاع نظیر فشار زیاد باشد ارتفاع لوله پیزومتر باید بسیار زیاد باشد. مثلاً اگر در شکل قبل سیال جاری در لوله آب بوده و فشار آن یک اتمسفر باشد ارتفاع نظیر آب این فشار برابر حدود ۱۰/۳۳ متر آب خواهد بود و بنابراین نیازی به پیزومتری با حداقل ارتفاع ۱۰/۳۳ متر برای اندازه‌گیری این فشار خواهد بود. ثانیاً این وسیله امکان اندازه‌گیری فشارهای منفی را ندارد برای حل مشکلات مذکور از مانومترهای جیوه‌ای و تفاضلی استفاده می‌شود. در ادامه به شرح کار این دستگاه‌ها پرداخته می‌شود. اما پیشتر ذکر نکات زیر در این خصوص ضروری است.

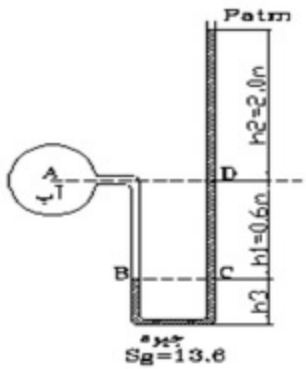
۱- همانطور که پیشتر اثبات شد، نقاط همتراز در یک سیال ثابت همفشار می‌باشند.

۲- با حرکت به سمت پائین فشار زیاد شده و بالعکس.

۳- در خصوص گازها چون وزن حجمی آنها خیلی کم است، از تغییرات فشار با عمق در آنها (در محدوده تغییرات عمق در مانومترها) صرفه نظر می‌شود.

مثال ۲-۳

در شکل زیر برای اندازه‌گیری فشار در لوله‌ای در نقطه A، از یک مانومتر جیوه‌ای استفاده شده است، فشار در نقطه A را محاسبه کنید.



شکل ۲-۹: شکل مثال ۲-۳

حل:

$$P_B = \gamma_w . h_1 + P_A$$
$$= 9.81 \times 1000 \times 0.6 + P_A$$
$$P_B = 5886 + P_A$$

فشار در نقطه B و C یکسان است پس:

$$P_B = P_C$$

چرا فشار در نقطه B و C ثابت است؟

$$P_B + h_3 . \gamma_{Hg} - h_3 . \gamma_{Hg} = P_C$$
$$\Rightarrow P_B = P_C$$

پس خواهیم داشت:

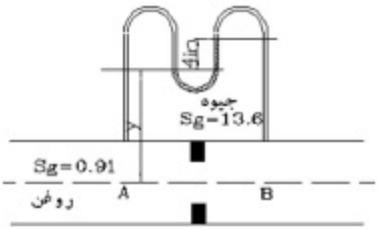
$$P_C = 5886 + P_A \qquad (I)$$
$$P_C - h_1 . \gamma_{Hg} - h_2 . \gamma_{Hg} = P_D$$
$$P_C - 0.6 \times 9810 \times 13.6 - 0.20 \times 9810 \times 13.6 = 0 \qquad (II)$$
$$I, II \Rightarrow P_A = -(9810 \times 0.6) + 13.6 \times 9.81 \times 1000 \times 0.8$$
$$P_A = 100846.8 \quad Pa$$

راه حل خلاصه تر

$$P_A + h_1 . \gamma_w - h_1 . \gamma_{Hg} - h_2 . \gamma_{Hg} = P_D$$
$$P_A = -h_1 . \gamma_w + (h_1 + h_2) \gamma_{Hg}$$
$$P_A = -0.6 \times 9810 + 0.8 \times 9810 \times 13.6$$
$$P_A = 100846.8 Pa$$

مثال ۲-۴:

یک مانومتر تفاضلی مطابق شکل به یک لوله متصل است. اختلاف فشار بین نقطه A و B را بدست آورید.



شکل ۲-۱۰: شکل مثال ۲-۴

حل:

$$P_A - \gamma_{oil} \times y - \gamma_{Hg} \times \left(\frac{4}{12}\right)ft + \gamma_{oil} \times \left(\frac{4}{12} + y\right)ft = P_B$$

$$P_A - P_B = 0.91 \times 62.4 \times y + 13.6 \times 62.4 \times \frac{4}{12} - \left(\frac{4}{12} + y\right) \times 0.91 \times 62.4$$

$$P_A - P_B = 264.2 Lb/ft^2$$

نکته: در سیستم BG مقدار ρ آب در دمای ۲۰° برابر $1.94\ Slug/ft^3$ و شتاب جاذبه $32.2\ ft/s^2$ است پس در این سیستم γ آب برابر $62.4\ Lb/ft^3$است.

۲-۱۰- نیروهای وارد بر سطوح از طرف سیال ساکن (نیروهای هیدرواستاتیکی)

یادآوری می‌شود در سیال ساکن نیروی برشی و تنش برشی وجود ندارد و نیروی وارده از طرف سیال ساکن بر هر سطح واقعی یا فرضی که در نظر گرفته شود، عمود خواهد بود.

نیروهای هیدرواستاتیکی در چند تقسیم‌بندی به صورت زیر مورد بررسی خواهند گرفت.

۱- نیروهای وارد بر سطوح صاف

الف- نیروی وارده بر سطح افقی

ب- نیروی وارده بر سطح قائم

ج- نیروی وارده بر سطح مورب

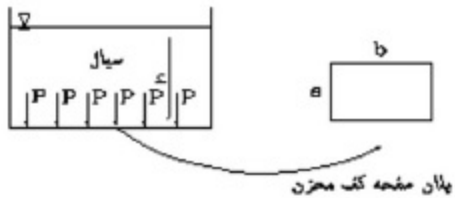
۲- نیروهای وارده بر سطح منحنی الشکل

۲-۱۰-۱ - نیروهای هیدرواستاتیکی وارد برسطوح افقی

اگر سطح صاف مورد نظر در یک صفحه افقی باشد، محاسبه نیرو کار ساده‌ای خواهد بود زیرا فشار در هر نقطه از سطح مورد نظر یکسان است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F = P.A$$

که P فشار در سطح مورد بررسی بوده و از رابطه $P = \gamma h$ بدست می‌آید و A سطحی است که نیروی هیدرواستاتیکی به آن وارد می‌شود.



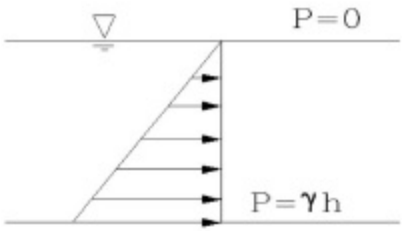
شکل ۲-۱۱: نیروی وارد بر سطوح افقی صاف

$$F = PA \Rightarrow F = \gamma h \times (a \times b)$$

۲-۱۰-۲- نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح قائم

یک صفحه قائم که لبه آن در سطح آزاد آب است و عرض آن (عمودبر صفحه) ثابت است ،به صورت شکل۲-۱۲ را در نظر بگیرید. در این حالت اگر نوع سیال (γ آن) در عمق تغییر نیابد، فشار از صفر در سطح آزاد تا γh در کف به صورت خطی تغییر می‌کند. اگر توزیع فشار یکنواخت بود مرکز فشار (محل اثر نیروی برآیند) همان مرکز سطح صفحه قائم خواهد بود، ولی با توجه به توزیع خطی فشار مرکز فشار پائین‌تر از مرکز سطح خواهد بود. در این حالت نیروی افقی وارد بر صفحه قائم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F = \gamma h_C A$$

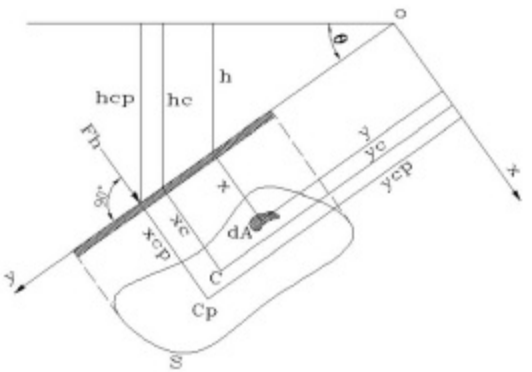


شکل ۲-۱۲: تغییرات فشار و نیروی فشاری وارد بر صفحه قائم در عمق

که رابطه فوق h_C فاصله مرکز سطح تا سطح آزاد سیال می‌باشد و با توجه به شکل صفحه قائم، متغیر است. در ادامه این فصل روابط مورد نیاز برای تعیین h_C هر سطح ارائه گردیده است.

۲-۱۰-۳- نیروهای هیدرواستاتیکی وارده بر سطوح مورب

اگر صفحه مستغرق نسبت به امتداد افق زاویه θ را بسازد (مطابق شکل ۲-۱۳)، آنگاه نیروی افقی وارد بر سطح مورب به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۲-۱۳: نیروی فشاری وارد بر سطح مورب

برای محاسبه نیروی وارد بر سطح مورب S، المان dA از این سطح را در نظر گرفته و نیروی عمودی وارد بر این صفحه را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dF = PdA$$

در این رابطه F نیروی وارد بر المان، P فشار وارد بر المان و dA مساحت المان می‌باشد. بدین ترتیب نیروی وارد بر کل صفحه S را می‌توان از جمع نیروهای وارد بر المان‌های dA از این صفحه به ترتیب زیر محاسبه کرد:

$$F = \int_S P.dA$$

که F نیروی وارد بر صفحه به مساحت S می‌باشد

$$F = \int_S \gamma h dA$$
$$h = y \sin\theta$$
$$F = \int_S \gamma.y.\sin\theta.dA$$
$$F = \gamma \sin\theta \int_S ydA$$

در رابطه فوق $\int_S y.dA$ همان ممان اول سطح حول محور Xها است. و از قبل می دانیم:

$$\int_S ydA = y_C \times A$$
$$y_C = \frac{\int_S ydA}{A}$$

بنابراین نیروی وارد بر سطوح مورب برابر است با:

$$F = \gamma.\sin\theta.y_C.A$$

که برابر است با:

$$F = \gamma.h_C.A$$

که در این رابطه h_C ارتفاع قائم مرکز سطح صفحه مورب تا سطح سیال می‌باشد و A مساحت سطح مورب است. y_C نیز فاصله افقی مرکز سطح صفحه مورب تا سطح آزاد سیال است. h_C و y_C با رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$h_C = y_C \sin\theta$$

۲-۱۱- مرکز فشار:

مرکز فشار محل اثر نیروی فشاری برآیند روی یک جسم مستغرق است. مرکز فشار به صورت $Cp(x_{CP},y_{CP})$ نمایش داده می‌شود. موقعیت مرکز فشار را برای صفحه قائم و مورب می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

۲-۱۱-۱-تعیین محل y_{CP}

مجموع لنگرهای نیروهای فشارهای جزیی نسبت به محور X=گشتاور نیروی F حول محور x

بنابراین

$$F\times y_{CP} = \int_S y.dF$$
$$= \int_S y.(PdA)$$
$$= \int_S y.(\gamma h).dA$$
$$= \int y.\gamma.y.\sin\theta.dA$$
$$= \int_S \gamma.\sin\theta.y^2.dA$$
$$F\times y_{CP} = \gamma.\sin\theta.\int_S y^2 dA$$

در این رابطه $\int_S y^2 dA$، ممان دوم سطح نسبت به محور xها است یعنی:

$$I_X = \int y^2 dA$$

بنابراین از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$y_{CP} = \frac{\gamma.\sin\theta.I_X}{\gamma.\sin\theta.y_C.A}$$

$$y_{CP} = \frac{I_X}{y_C.A}$$

که y_{CP} فاصله مرکز فشار تا محور xها است. در رابطه فوق برای محاسبه مرکز فشار از I_X یا ممان دوم سطح نسبت به محور xها استفاده می‌شود. در ادامه به محاسبه I_{XC} یا ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح جسم بجای I_X پرداخته می‌شود.

بنابراین داریم:

$$I_X = I_{XC} + y_C{}^2 A$$

با توجه به این رابطه y_{CP} به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$y_{CP} = y_c + \frac{I_{XC}}{y_C.A}$$

همانطور که از رابطه فوق مشخص است چون $\frac{I_{XC}}{y_C.A}$ همیشه بزرگتر از صفر می‌باشد بنابراین مقدار y_{CP} همیشه بزرگتر از y_C خواهد بود. و در حالت حدی زمانی y_{CP} برابر y_C خواهد شد که y_C بسیار بزرگ باشد تا حاصل $\frac{I_{XC}}{y_C.A}$ به صفر میل کند. پس نتیجه گرفته می‌شود در همه حال مرکز فشار پائین‌تر از مرکز سطح است و با افزایش عمق سیال این فاصله کمتر می‌شود.

۲-۱۱-۲- تعیین محل x_{CP}

برای تعیین فاصله افقی مرکز فشار تا محور yها، همانند آنچه در قسمت پیشین برای محاسبه y_{CP} انجام گردید،عمل می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$F.x_{CP} = \int_S x.P.dA$$
$$= \gamma \sin\theta \int_S xydA$$

در رابطه فوق

$$I_{xy} = \int_S xydA$$

پس:

$$x_{Cp} = \frac{I_{xy}}{y_C.A}$$

از طرفی داریم:

$$I_{xy} = I_{xyc} + A.x_C.y_C$$

در نهایت خواهیم داشت:

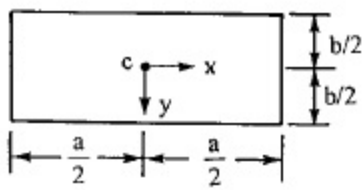
$$x_{CP} = x_C + \frac{I_{xyc}}{y_C.A}$$

نکته: اگر یکی از محورهای موازی x و y که از مرکز سطح می‌گذرد محور تقارن باشد، $I_{xyc} = 0$ می‌شود و $x_{CP} = x_C$ خواهد شد.

۲-۱۲- یادآوری:

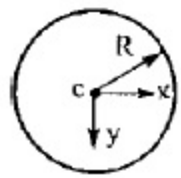
مرکز سطح و ممان اینرسی اشکال زیر به صورت زیر می‌باشد.

۱- مستطیل



$$x_C = a/2$$
$$y_C = b/2$$
$$I_{xc} = 1/12\, ba^3$$
$$I_{yc} = 1/12\, ab^3$$

۲- دایره



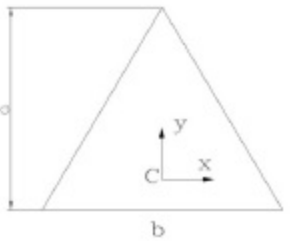
$$C : O$$
$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

۳- ربع دایره

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}$$
$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$
$$I_{xc} = \frac{\pi \times R^4}{16}$$

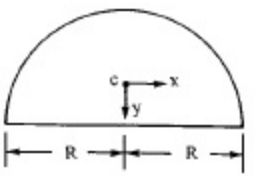
۴- مثلث

$$x_C = \frac{b}{2}$$
$$y_C = \frac{1}{3}a$$
$$I_{xc} = \frac{1}{36}ba^3$$



۵- نیم دایره

$$x_C = 0$$
$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$
$$I_{xc} = \frac{\pi \times R^4}{8}$$

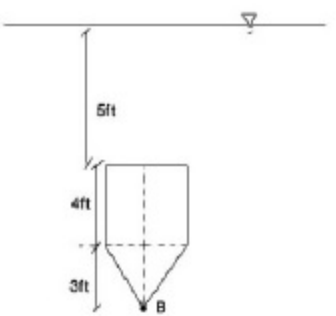


۶- اشکال مرکب

با مثال زیر به شرح روش‌های موجود برای تعیین مرکز سطح و ممان اینرسی اشکال مرکب پرداخته می‌شود.

مثال ۲-۵-

مقدار و محل اثر فشاری آب را بر یک طرف سطح شکل زیر که بصورت قائم در آب قرار گرفته است، تعیین کنید.



شکل ۲-۱۴: شکل مثال ۲-۵

حل:

راه حل اول:

$$Fh_1 = \gamma h_{c_1} A_1 = 62.4 \times \left(5 + \frac{4}{2}\right) \times 4 \times 4$$

$$Fh_1 = 6988.8 lb$$

$$y_{cp_1} = y_{c_1} + \frac{I_{xx}}{y_{c_1} A_1} = 7 + \frac{\left(4^4/12\right)}{4 \times 4 \times 7} = 7.19 ft$$

$$Fh_2 = \gamma h_{c_2} A_2 = 62.4 \times \left(9 + 3 \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{3 \times 4}{2}$$

$$Fh_2 = 3744 lbf$$

$$y_{cp_2} = 10 + \frac{\left(3^2 \times 4\right)/36}{10 \times \frac{3 \times 4}{2}} = 10.05 ft$$

فاصله مرکز فشار تا کف

$$B_p = \frac{\sum MB}{\sum F}$$

$$MB = (12 - 7.19) \times 6988.8 + (12 - 10.05) \times 3744 = 40916.92 lb.ft$$

$$\sum F = Fh_1 + Fh_2 = 10732.8 lb$$

محاسبه فاصله مرکز فشار جسم تا سطح آب

$$B_p = 3.812 \rightarrow y_{cp} = 12 - 3.812 = 8.188 ft$$

راه حل دوم:

محاسبه مرکز ثقل جسم

$$y_c \times \left(4^2 + \frac{3 \times 4}{2}\right) = (5+2) \times 4^2 + (9+1) \times \frac{3 \times 4}{2} \Rightarrow y_c = 7.818$$

محاسبه نیروی وارد بر جسم

$$Fh = \gamma h_c A = 62.4 \times 7.818 \times 22 = 10732.80 lb$$

محاسبه ممان اینرسی قسمت مثلثی نسبت به مرکز سطح جسم

$$(I_{xx})_1 = \frac{4 \times 3^3}{36} + (10 - 7.818)^2 \times \frac{3 \times 4}{2} = 31.567 ft^4$$

محاسبه ممان اینرسی قسمت مربعی نسبت به مرکز سطح جسم

$$(I_{xx})_2 = \frac{4^2}{12} + 4^2 \times (7.818 - 7)^2 = 32.039 ft4$$

مرکز سطح جسم

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2 = 63.606 ft^4$$

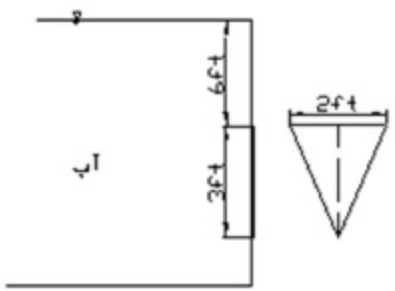
$$y_{cp} = 7.818 + \frac{63.606}{7.818 \times 22} = 8.188 ft$$

مثال ۲-۶:

یک دریچه مثلثی قائم را که یک طرف آن مطابق شکل در معرض آب قرار گرفته است در نظر بگیرید:

الف: نیروی برآیند بر دریچه را حساب کنید.

ب: موقعیت مرکز فشار دریچه را بدست آورید.



شکل ۲-۱۵: شکل مثال ۲-۶

حل

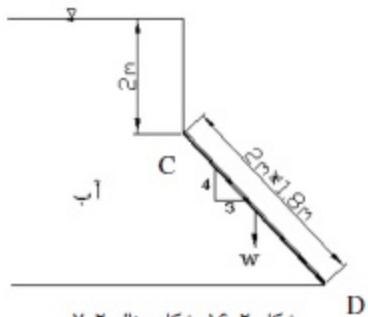
$$F_h = \gamma h_C A = 62.4 \times \left(\frac{1}{3}\times 3 + 6\right) \times \frac{2\times 3}{2} = 1310\ \text{Lb}$$

$$h_{CP} = h_C + \frac{I}{h_C \times A}$$

$$h_{CP} = 7 + \frac{\frac{bh^3}{36}}{7\times 3} = 7.07\,\text{ft}$$

مثال ۲-۷:

دریچه مستطیلی CD به عرض ۱/۸ متر (عمود بر صفحه کاغذ) و طول ۲ متر را مطابق شکل زیر درنظر بگیرید. وزن لازم برای بسته نگاه داشتن دریچه تا زمانی که سطح آب ۲ متر بالاتر از محور لولای دریچه قرار گیرد، چقدر است.



شکل ۲-۱۶: شکل مثال ۲-۷

حل:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \theta = 36.87^\circ$$

$$F_h = \gamma . h_c . A$$

$$9810 \times 2.8 \times 1.8 \times 2 = 98800N$$

$$y_c = \frac{2}{2} \times (2/Cos36.87^\circ) = 3.5m$$

$$h_c = 2 + \frac{2}{2} \times Cos(36.87) = 2.8m$$

$$y_{cp} = y_c + \frac{I}{y_c A} = 3.5 + \frac{\frac{1.8 \times 2^3}{12}}{1.8 \times 2 \times \frac{h_c}{Cos(36.87)}} = 3.59m$$

- نیروی وزن به مرکز ثقل مستطیل اثر می‌کند.

دریچه باز نخواهد شد اگر:

$$\sum M_c = 0$$

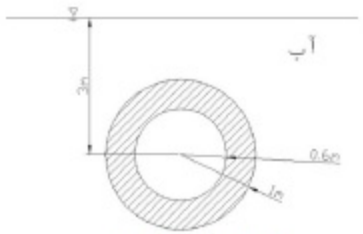
$$F_h \times \left(y_{CP} - \frac{2}{Cos\theta} \right) - W \sin\theta \times 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$W = 180.3KN \rightarrow$$

اگر وزن دریچه ۱۸۰/۳ کیلو نیوتن باشد، در این صورت اگر ارتفاع آب تا ۲ متر نیز افزایش یابد، دریچه باز نمی‌شود.

مثال ۲- ۸

مرکز فشار نیروی وارد از طرف آب به یک سطح حلقوی قائم مطابق شکل زیر را بدست آورید.



۲-۱۷: شکل مثال ۲-۷

حل:

$$F_h = \gamma h_c A$$

$$F_h = 9810 \times 3 \times (\pi \times 1^2 - \pi \times 0.6^2) = 59.05KN$$

$$h_{cp} = h_c + \frac{I}{h_c \times A}$$

$$I_{\overline{X}} = \frac{\pi \times 1^4}{4} - \frac{\pi \times 0.6^4}{4} = 0.6836m^4$$

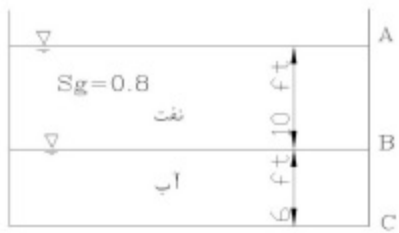
$$h_{cp} = 3 + \frac{0.6836}{3(\pi \times 1^2 - \pi \times 0.6^2)} = 3.113m$$

۲-۱۳- نیروی هیدرواستاتیک در سیال چند لایه

با یک مثال به بررسی نیروی هیدرواستاتیک در سیال چند لایه پرداخته می‌شود.

مثال ۲-۹:

مخزن شکل زیر حاوی نفت و آب است. نیروی برآیند بر روی ضلع ABC را بدست آورید. در صورتی که مخزن (عمود بر صفحه کاغذ) ۴ فوت باشد.



۲-۱۸: شکل مثال ۲-۷

حل:

برای قسمت AB :

$$F_{AB} = \gamma h_c A = 0.8 \times 62.4 \times 5 \times 40 = 9980 Lb$$

$$(h_{c.p})_{AB} = \frac{2}{3} \times 10 = 6.67 ft$$

برای قسمت BC :

$$h_w = sg \times h_{oil} = 0.8 \times 10 = 8 ft$$

$$F_{BC} = \gamma h_c A = 62.4 \times (8+3) \times 6 \times 4 = 16470 Lb$$

$$(h_{cp})_{BC} = h_c + \frac{I}{h^c \times A} = 11 + \frac{\frac{4 \times 6^3}{12}}{11 \times 24} = 11.27 ft$$

مرکز فشار قسمت BC، ۱۱/۲۷ فوت زیر نقطه O یا ۱۳/۲۷ فوت زیر نقطه A قرار دارد.

$$F = F_{AB} + F_{BC} = 26450 Lb$$

برای تعیین نقطه اثر نیروی برآیند می‌توان نوشت

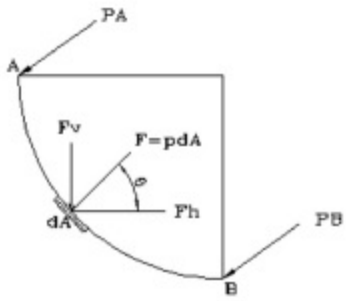
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 26450 \times h_{cp} = 9980 \times 6.67 + 16470 \times 13.27$$

$$h_{cp} = 10.78 ft$$

۲-۱۴- نیروهای وارد بر سطوح منحنی

از آنجا که نیروی وارده از طرف سیالات بر سطوح مختلف عمود بر آنها است، وقتی با سطوح منحنی مواجه هستیم امتداد جزء نیروهای وارده به جزء سطوح با یکدیگر متفاوت بوده و محاسبه برآیند آن‌ها کاملاً پیچیده است. لذا معمولاً برای محاسبه نیروی وارده بر این سطوح، اقدام به محاسبه مؤلفه نیروهای فشاری در امتداد مختلف می‌گردد.

در شکل ۲-۱۹ نیروی وارد بر یک سطح منحنی و مؤلفه های آن نمایش داده شده است.



شکل ۲-۱۹: نیروی وارد بر یک سطح منحنی و مؤلفه‌های آن

۲-۱۴-۱- مؤلفه افقی وارد بر سطوح منحنی

همانطور که در شکل۲-۱۹ مشاهده می‌شود نیروی وارد بر المان A به مساحت dA که روی سطح منحنی شکل AB قرار دارد برابر با $F = PdA$ است. لذا مؤلفه افقی نیروی وارد بر المان $PdA\,Cos\theta$ خواهد بود. لذا با جمع کردن نیروهای وارد بر مجموع المانهای A روی سطح AB نیروی افقی وارد بر این سطح بصورت زیر خواهد بود:

$$F_h = \int_{AB} P.dA.Cos\theta$$

در رابطه فوق $dACos\theta$ همان تصویر قائم جز سطح dA خواهد بود لذا خواهیم داشت:

$$F_h = P \times A$$

که در رابطه فوق A، تصویر قائم سطح AB خواهد بود. بطور مثال برای یک سطح منحنی الشکل به صورت استوانه تصویر قائم سطح برابر یک مستطیل به عرض برابر قطر استوانه و طول برابر ارتفاع استوانه خواهد بود.

از آنجا که

$$P = \gamma h_C$$

است. خواهیم داشت:

$$F = \gamma h_C A$$

بنابراین مؤلفه افقی نیروی فشاری وارد بر یک سطح منحنی الشکل برابر با نیروی فشاری است که بر تصویر قائم سطح مزبور وارده شده و از مرکز فشار تصویر قائم سطح عبور خواهد نمود.

۲-۱۴-۲- مؤلفه قائم نیروی وارد برسطوح منحنی

مطابق شکل ۲-۱۷ مؤلفه قائم نیروی وارد بر المان A به مساحت dA برابر $PdA\sin\theta$ می‌باشد. بنابراین نیروی قائم وارد بر سطح منحنی AB به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_V = \int_{AB} P.dA.\sin\theta$$
$$= \int_{AB} \gamma.h.dA.\sin\theta$$
$$= \gamma \int h.\sin\theta.dA$$
$$= \gamma \int_{AB} d\forall$$
$$F_V = \gamma \forall$$

که $\forall$ حجم آبی است که بطور قائم روی تصویر افقی سطح AB قرار می‌گیرد. بنابراین مؤلفه قائم نیروی فشاری که بر یک سطح منحنی اثر می‌کند برابر وزن ستونی از مایع است که بر سطح مزبور و سطح آزاد آب محدود می‌شود. محل اثر این نیروی حجمی، مرکز حجم این ستون سیال است.

۲-۱۴-۳- برآیند نیروهای وارد بر سطح منحنی

پس از محاسبه نیروهای F_V و F_h می‌توان برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی الشکل را از رابطه زیر محاسبه کرد:

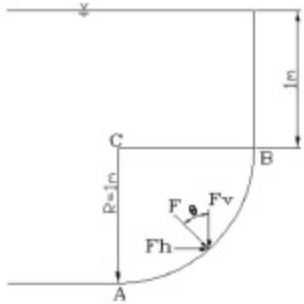
$$F = \sqrt{F_V{}^2 + F_h{}^2}$$

θ زاویه اثر این نیرو نسبت به امتداد افق برابر است با:

$$tg\theta = \frac{F_v}{F_h}$$

مثال ۲-۱۰:

برآیند نیروهای وارد بر دریچه AB در شکل زیر را حساب کنید. شعاع دریچه ۱ متر می‌باشد. زاویه‌ای که نیروی برآیند اثر می‌کند را نیز بدست آورید.



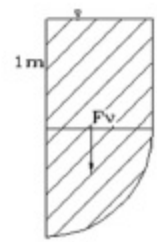
شکل ۲-۲۰: شکل مثال ۲-۸

حل:

$$F_h = \gamma h_C A = 9810 \times \left(1 + 1 \times \frac{1}{2}\right) \times (1 \times 1) = 14.72KN$$

$$F_V = \gamma \times V$$

$$F_V = \gamma_W \left(\frac{\pi \times 1^2}{4} \times 1 + 1 \times 1 \times 1\right) = 17.51KN$$

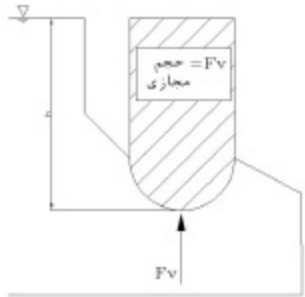


$$F = \sqrt{14.72^2 + 17.51^2} = 22.87KN$$ برآیند نیروها

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{F_V}{F_h}\right) \Rightarrow tg^{-1}\left(\frac{17.51}{14.72}\right) = 49.95^\circ$$

مثال ۲-۱۱ (مفهومی)

فرض کنید که در شکل زیر باید نیروهای قائم وارد بر سطح منحنی الشکل زیر تعیین شود

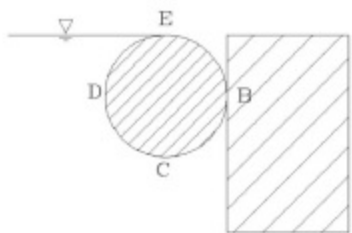


شکل ۲-۲۱: شکل مثال ۲-۹

همانطور که در شکل فوق مشخص است، روی سطح منحنی حجم آبی وجود ندارد، و بنابراین نیروی قائمی از طرف بالا به این سطح وارد نخواهد شد. ولی به علت اختلاف ارتفاع کف قسمت منحنی با سطح آب، نیروی قائمی متناسب با ارتفاع h، از سمت پایین و به طرف بالا به قسمت منحنی وارد می‌گردد. برای محاسبه این نیرو از یک حجم مجازی استفاده می‌شود بدین ترتیب که حجم آب فرضی بین قسمت منحنی الشکل و سطح آب محاسبه شده و در وزن مخصوص سیال ضرب می‌شود.

مثال ۲-۱۲:

استوانه‌ای به قطر ۱ متر و طول ۸ متر (عمود بر صفحه کاغذ) مطابق شکل در نقطه B در حالت تعادل قرار دارد. وزن استوانه را حساب کنید.



۲-۲۲: شکل مثال ۲-۱۲

حل:

دو نیرو داریم:

۱- نیروی وزن بشکه

۲- نیروی فشاری عمود بر سطح

$$F_v = F_{v2} - F_{v1}$$

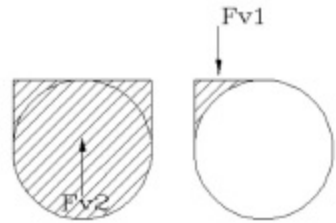
اگر $F_V=w$ باشد، جسم در حال تعادل خواهد بود.

$$F_{V_2} = [(0.5\times 1\times 8) + (\frac{\pi\times 0.5^2}{2}\times 8)\gamma w$$

$$F_{V_1} = [(0.5\times 0.5\times 8) - (\frac{\pi\times 0.5^2}{4}\times 8)\gamma w$$

$$F_V = F_{V_2} - F_{V_1} = 65.71KN$$

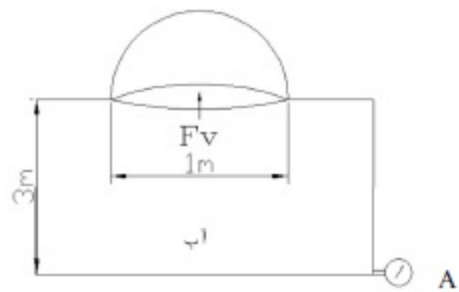
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F_V - w = 0 \rightarrow F = w$$



پس وزن استوانه باید $65.71\ KN$ باشد تا جسم در تعادل باشد.

مثال ۲-۱۳:

هنگامی که فشار، $70KPa$ است، در شکل زیر، نیروی وارد بر نیمکره چقدر خواهد بود؟



شکل ۲-۲۳: شکل مثال ۲-۱۳

حل:

فشار در نقطه A

$$P_a = \gamma h \rightarrow h = \frac{P_a}{\gamma} = \frac{70\times10^3\,Pa}{9810\frac{N}{m^3}} = 7.14m$$

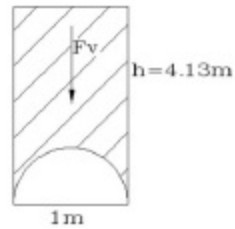
ارتفاع نظیر فشار در نقطه B

$$h = 7.14 - 3 = 4.14m$$

$$FV = \gamma\forall$$

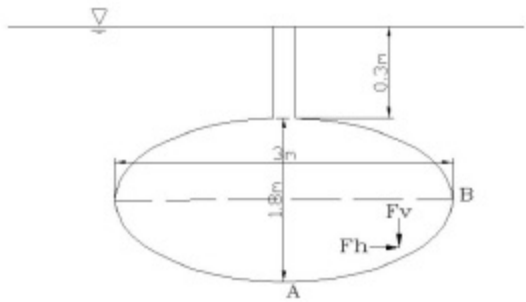
$$= \left[\left(\pi\times0.5^2\times4.13\right) - \left(\frac{4}{6}\pi\times0.5^3\right)\right]\times9810$$

$$= 29.33KN\uparrow$$



مثال ۲-۱۴:

تانک شکل زیر 2.4m در جهت عمود بر صفحه کاغذ طول دارد. مقدار و جهت مؤلفه های نیروی افقی و قائم را بر قطعه AB مشخص کنید.



شکل ۲-۲۴: شکل مثال ۲-۱۴

حل:

$$F_h = \gamma h_c A = 9810\times(0.3+0.9+\frac{0.9}{2})\times0.9\times2.4 = 34962.8N$$

$$F_{V1} = \gamma \forall_{ABCD}$$
$$F_{V2} = \gamma \forall_{ADCB}$$

که F_{V1} به سمت پائین و F_{V2} به سمت بالا وارد می‌شود که برآیند آنها برابر است با:

$$F_V = F_{V2} - F_{V1}$$
$$= \gamma(\forall_{ADCB} - \forall_{ABCD})$$
$$F_V = \forall \gamma$$

که F_V برآیند نیروهای فشاری سیال ساکن به طرف بالا و $\forall$ حجم جسم غوطه‌ور در سیال و γ وزن مخصوص سیال می‌باشد. نیروی F_V از مرکز ثقل جسم غوطه‌ور می‌گذرد .به این نیرو، نیروی شناوری گفته شده و با F_b نمایش داده می‌شود.

همانطور که از رابطه فوق مشخص است، این نیرو متناسب با حجم جسم است. یا به عبارتی برابر با وزن سیال جابجا شده می‌باشد که این همان قانون ارشمیدس است.

ب) نیروی وزن

این نیرو ناشی از اثر نیروی جاذبه بر جسم بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \gamma_s \forall$$

که γ_s وزن مخصوص جسم می‌باشد. نیروی W به سمت پائین اثر می‌کند و از مرکز ثقل جسم می‌گذرد در حالتی که جسم در حال تعادل است باید:

$$Fb=W$$

باشد. که برای یک جسم توپر این رابطه بدان معنی است که γ جسم با γ سیال یکی است. اگر نیروی شناوری بزرگتر از وزن باشد یعنی:

$$F_b>w$$

جسم به سمت بالا حرکت کرده و اگر نیروی وزن بزرگتر از نیروی شناوری باشد یعنی

$$w>F_b$$

جسم در سیال غرق خواهد شد.

۲-۱۶- نیروی شناوری در اجسام شناور

اگر جسم مورد بررسی به صورت شناور در سیال باشد آنگاه نیروی شناوری وارد بر آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

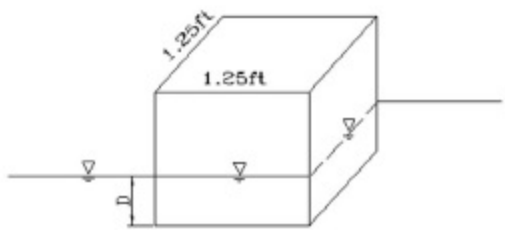
$$F_b = \gamma \times \forall_S$$

که γ وزن مخصوص سیال و $\forall s$ حجم قسمت غوطه‌ور در سیال مطابق شکل ۲-۲۶ می‌باشد. خاطر نشان می‌شود نیروی شناوری در اجسام شناور از مرکز ثقل جسم شناور می‌گذرد.

شکل ۲-۲۶: جسم شناور و نیروهای وارد بر آن

مثال ۲-۱۵:

یک جسم مکعبی شکل به اضلاع 1.25ft مطابق شکل در آب شناور است. وزن مخصوص نسبی جسم 0.6 است. عمق غوطه‌وری جسم (D) را بدست آورید.



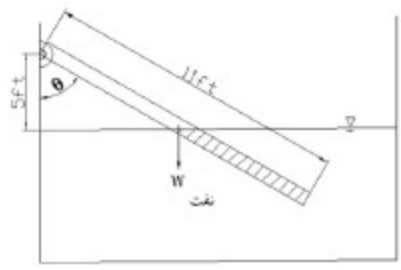
شکل ۲-۲۷: شکل مثال ۲-۱۵

حل:

$$W = mg$$
$$W = \rho g \forall = 0.6\rho_w \times g \times 1.25^3 = 73.1Lb$$
$$F_b = \gamma_\omega \forall_s = 62.4 \times (1.25 \times 1.25 \times D)$$
$$F_b = W \Rightarrow D = 0.75ft$$

مثال ۲-۱۶:

یک تیر به وزن واحد طول $2.2Lb/ft$ و سطح مقطع $8in^2$ در نقطه A لولا شده و سر دیگر آن داخل نفت ($\gamma = 53\frac{lb}{ft^3}$) قرار دارد. تحت چه زاویه‌ای این تیر شناور خواهد ماند.



شکل ۲-۲۸: شکل مثال ۲-۱۶

حل:

$$W = 2.2 \times 11 = 24.2Lb$$
$$F_b = \gamma_{oil} \forall = 53 \times (x \times 8in^2 \times \frac{1}{12^2 in^2}) = 2.94x$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow W \times 5.5 \times \sin\theta - 2.94x \times (11 - \frac{x}{2}) \sin\theta = 0$$
$$1.47x^2 - 32.38x + 133.1 = 0$$
$$x_1 = 16.53 \quad \text{غ.ق.ق}$$
$$x_2 = 5.47$$
$$\text{Cos}^{-1}\theta = \frac{5}{11 - 5.47}$$
$$\theta = 25.3°$$